

## NUEVOS ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA TÉCNICA

Juan Gómez García [jgomezg@um.es](mailto:jgomezg@um.es) \*\*

José Solana Ibáñez [jsolana@ucam.edu](mailto:jsolana@ucam.edu) \*

Josefina García Lozano \*

\* Universidad Católica San Antonio (Murcia)

\*\* Universidad de Murcia

### Resumen

Desde la publicación del trabajo de Charnes, Cooper y Rhodes (1978) la metodología conocida como DEA (Data Envelopment Analysis), se ha consolidado como la herramienta más potente para el desarrollo empírico de trabajos tendentes a evaluar la eficiencia de todo tipo de unidades de producción. En este marco, analizamos el problema de la evaluación de la eficiencia de los Departamentos de la Universidad de Murcia. En una primera parte se introduce el concepto moderno de la medida de la eficiencia técnica, se presentan los inputs y outputs a emplear en el estudio, junto a una revisión de los principales modelos y aplicaciones desarrolladas. En la segunda parte, se acometerá el estudio de eficiencia al caso propuesto. Para cada departamento se procede a obtener los coeficientes de eficiencia técnica. El análisis continúa con un análisis individual y uno colectivo. En el primero, se estudia para cada unidad ineficiente, las razones de las ineficiencias detectadas, su grupo de referencia, un análisis de mejoras potenciales, y se calcula la contribución de cada factor al coeficiente de eficiencia calculado. En el análisis colectivo, se presenta toda la información de manera global con el objetivo de obtener una visión de conjunto. En una fase final de conclusiones, sometemos los resultados del modelo propuesto a un análisis de sensibilidad y se presentan líneas de desarrollo emergentes: aleatoriedad del modelo, inclusión de variables categóricas y análisis de ponderaciones.

**Palabras Clave:** Análisis Envolvente de Datos, Eficiencia, Fronteras de Producción Estocásticas.

Área Temática: Métodos Cuantitativos / Economía del Sector Público.

## 1.- INTRODUCCIÓN.

Una crítica general de los estudios de eficiencia se halla en el supuesto implícito de que las entidades que componen el sistema bajo estudio funcionan eficientemente. Ello explica en parte la carencia de estudios sobre evaluación ex-post. Los primeros indicios de desencanto datan de finales de la década de los treinta<sup>1</sup> y se hacen especialmente evidentes en el ámbito del Sector Público. Se hizo necesario replantear el problema de la eficiencia interna de las organizaciones e impulsar las investigaciones tendentes a evaluar empíricamente la eficiencia de centros productivos concretos.

El auge del Análisis Empírico de la Eficiencia Productiva (sobre todo en el Sector Público) se debe también al desarrollo reciente de técnicas analíticas diseñadas específicamente. En ningún caso podemos concebir los estudios de eficiencia de forma global, debe hacerse de forma sectorial. Cada sector (Sanidad, Educación, etc.) tiene unas características propias (de tipo tecnológico, estructura de costes, demanda, entorno, output, herramientas analíticas, etc.) que hacen inútil la posibilidad de un estudio general.

Dentro de la Literatura de la Eficiencia, el Sector Público ha sido el foco de principal interés y el auténtico motor del desarrollo metodológico de toda una serie de técnicas (DEA). Este es pues el marco en que se sitúa nuestro trabajo: la medición de la eficiencia en el Sector Público: La Educación Universitaria.

Gracias a su adaptación a los rasgos propios de la producción pública, la técnica no paramétrica conocida como DEA (Análisis Envolvente de Datos) es la que se acepta ampliamente en la literatura como la ideal para los estudios de evaluación de los servicios públicos. La metodología debe ser capaz de afrontar aspectos como:

La ausencia de mercado: el output público no se vende en el mercado, por lo que es difícil en la práctica su medición..

Carácter monopolístico de la producción pública: que, además de liberar a las unidades productivas de la presión competitiva que conduce a un comportamiento eficiente, no ofrece la posibilidad de manejar información en cuanto a precios. Como señala Pedraja, *"los precios, en el mejor de los casos, si existen, son sospechosos"*. La ausencia de competencia hace que las relaciones entre los inputs y outputs, es decir, la tecnología de producción pública, tenga un carácter incierto.

---

<sup>1</sup> Coase (1937). Williamson (finales 60)

En cuanto a la noción de eficiencia, lo anterior debe tenerse en cuenta a la hora de seleccionar el concepto a medir. Así, como aspecto más destacable, la noción de eficiencia no debe precisar valoraciones ante la sospecha en torno a los precios. Esto implica que debe centrarse en las cantidades físicas y no en los valores, lo que refuerza, según veremos la elección del concepto de Eficiencia Técnica frente al de Eficiencia Asignativa.

El objetivo es medir la eficiencia de DMU's (Decision Making Units), es decir, de entidades cuyo objetivo no es la maximización del beneficio y que participan en programas públicos. Los propios Charnes, Cooper y Rhodes, que emplearon el método de optimización, consideran que *“el DEA proporciona una nueva aproximación para organizar y analizar los datos, que se ha convertido en una alternativa y un complemento a los tradicionales análisis de tendencia central y proporciona una nueva aproximación a los análisis coste-beneficio, estimación de fronteras, etc.”*<sup>2</sup>.

El resto del trabajo se estructura en cuatro partes:

En la sección segunda se presentan las metodologías de medición más comunes y se repasan brevemente las fases de deben considerarse a la hora de aplicar la metodología DEA a un estudio de eficiencia.

En la sección tercera se describe la técnica elegida, el DEA. Se centra la atención en los modelos CCR y BCC y sus posibles extensiones que son los que pueden evaluar mejor la calidad de la gestión universitaria. La elección de la formulación concreta requiere dos aspectos elementales. Por un lado, la elección de la “orientación” (minimización de inputs, maximización de outputs y no orientados); por otro lado la elección de la “escala” (beneficios constantes a escala o beneficios no constantes a escala). Las extensiones a los modelos básicos del DEA han adquirido especial relevancia en los últimos años: variables no discrecionales, inputs y outputs categóricos (variables dummy), etc. Finalmente se concluye sintetizando los principales resultados a la vez que se señalan las ventajas e inconvenientes de la metodología DEA.

Se incluye, a modo de anexo, una sección donde se presentan los resultados de la aplicación del DEA a la medición de la eficiencia de los Departamentos de la Universidad de Murcia.

## 2.- METODOLOGÍA DEA.

### 2.1.- Metodologías

Seguendo a Coelli, Rao y Battese (1998) se pueden distinguir cuatro metodologías en la literatura de la Eficiencia y Análisis de la Productividad:

1. Modelos de Producción Econométricos de Mínimos Cuadrados
2. Índices de Productividad Total (TFP)
3. Análisis Envolvente de Datos (DEA)
4. Fronteras Estocásticas (SF)

Los dos primeros métodos se aplican sobre todo a series temporales de datos agregados y proporcionan medidas de cambio técnico y productividad total. Ambos métodos asumen que las DMU's operan eficientemente desde el punto de vista técnico.

Los dos siguientes, se aplican sobre todo a datos sobre una muestra de DMU's en un momento del tiempo y proporcionan medidas de la eficiencia relativa entre dichas DMU's. Ninguno de ellos asume pues que las unidades productivas operan eficientemente.

Una segunda posibilidad de agrupación consiste en hacer notar que los métodos 1 y 4 suponen la estimación estadística de funciones paramétricas, mientras que los métodos 2 y 3 no. Bajo este criterio podríamos hablar de métodos paramétricos y no paramétricos respectivamente.

	Reconocen Ineficiencias	
	Sí	No
Paramétrico	Fronteras Estocásticas (SF)	Modelos de Producción Econométricos de Mínimos Cuadrados
No Paramétrico	Análisis Envolvente de Datos (DEA)	Índices de Productividad Total (TFP)

Tabla 2.1: Clasificación de la Metodología

Para el estudio de la eficiencia en el ámbito del Sector Público y, más concretamente, en la Universidad, metodológicamente, debemos limitarnos a las técnicas capaces de reconocer, analizar y

---

<sup>2</sup> Charnes et all (1994)

corregir ineficiencias: **el DEA y las Fronteras Estocásticas**. La elección entre ambas técnicas depende en parte del Sector analizado.

La metodología paramétrica se basa en el uso de una función de producción teórica (frontera de producción) que sirve para estimar el máximo output dados los inputs. La medida de eficiencia relativa se puede determinar entonces mediante la comparación de un output observado con un output teórico obtenido de la función de producción teórica. Esta aproximación requiere, por tanto, la imposición de una forma funcional específica de la relación existente entre los inputs y outputs. Dicha elección requiere a su vez supuestos específicos sobre la distribución de los términos de error y muchas otras restricciones que, especialmente en el caso de múltiples inputs y outputs (Sengupta 1988), dificultan la tarea.

La metodología no paramétrica (DEA), por contra, desarrolla un proceso de optimización para cada observación individual, con el objetivo de calcular una frontera discreta determinada por las DMUs eficientes en sentido paretiano. Ambos métodos utilizan toda la información contenida en los datos. En el caso paramétrico se asume que la ecuación obtenida es aplicable a cualquier DMU, por contra, el DEA optimiza la eficiencia de cada DMU, permitiendo analizar la situación de cada DMU en lugar de la de una DMU hipotética. Por otra parte, el DEA, no requiere supuesto alguno sobre la forma funcional de la frontera. Calcula una medida de eficiencia máxima de una DMU respecto al resto, con el único requisito de que aquélla se sitúe sobre la frontera o por debajo de ella. Las DMUs que no se sitúan en la frontera (ineficientes) se proyectan sobre la misma mediante una combinación convexa de las DMUs más próximas a ella situadas sobre la frontera (eficientes)<sup>3</sup>. Esto permite al DEA identificar, para una DMU dada, las fuentes y el nivel de ineficiencia de los inputs y outputs. Desde un punto de vista operativo, sus principales ventajas son que no es necesario plantear ningún tipo de hipótesis sobre la función de producción con que operan las unidades decisoras evaluadas y que existe la posibilidad de realizar un análisis post-óptimo de la solución, identificando las causas generadoras de ineficiencias.

No se pretende abordar la conveniencia de la metodología paramétrica frente a la no paramétrica<sup>4</sup>. De hecho, es posible unir ambas aproximaciones para obtener nuevas amalgamas. Así, por ejemplo, Banker y Johnston han extendido los modelos DEA mediante la introducción de desarrollos que permiten usar la caracterización estadística usual. La importancia del DEA se debe en cierta medida a que fue diseñado en respuesta a la necesidad de mejorar los métodos de evaluación y control de las actividades del Sector Público; no obstante, cabe señalar la observación de Seiford “*El*

---

<sup>3</sup> Estas unidades eficientes y más “próximas” a la DMU evaluada constituyen lo que en la literatura de Eficiencia se denomina como su “Conjunto de Referencia”.

*DEA se muestra particularmente efectivo para medir ciertas relaciones que otras metodologías no son capaces de descubrir”.*

## **2.2.- Etapas de un Análisis de Eficiencia.**

Repasaremos brevemente las fases que deben considerarse a la hora de aplicar la metodología DEA a un estudio de eficiencia, y que podemos resumir en tres:

### A.- Definición y selección de las DMUs.

El DEA es una metodología para evaluar y mejorar la eficiencia relativa de unidades comparables. Un grupo de unidades puede considerarse homogéneo cuando:

- Desempeñan las mismas tareas con los mismos objetivos.
- Los factores (inputs y outputs) que caracterizan el desempeño de todas las unidades del grupo son iguales, excepto por diferencias en intensidad.

Hay cierta tendencia a pensar que a mayor número de unidades mejor, puesto que mayor es la probabilidad de introducir en el análisis unidades de alto grado de desempeño. También se aduce que un número considerable de unidades facilita la identificación de las relaciones entre inputs y outputs del grupo. Por otra parte, los problemas de un elevado tamaño del grupo de DMU's pueden llegar por la pérdida de homogeneidad, aumentando las posibilidades de que los resultados se vean afectados por factores exógenos.

La determinación de las DMU's a emplear en un estudio se ven afectadas por dos tipos de barreras. La primera incluye barreras de tipo organizacional, físico o regional. La segunda tiene que ver con los períodos de tiempo usados para medir las actividades de las DMUs. Períodos demasiado largos pueden ocultar posibles cambios en las unidades; períodos demasiado cortos pueden ser insuficientes para reflejar correctamente las actividades de las DMUs.

En cualquier caso, la eficiencia relativa se mide con relación a las DMUs y a los factores seleccionados. No hay garantía de que la selección inicial sirva mejor para el objetivo de análisis. Así pues, en ocasiones, las consideraciones mencionadas pueden requerir de un proceso de iteración.

---

<sup>4</sup> Una revisión completa de tal cuestión puede encontrarse en los trabajos de Sengupta (1996), Thanassoulis y Read (1997) y W.W. Cooper y Tone (1999).

### B.- Selección de Inputs y Outputs.

La lista inicial debe ser lo más amplia posible. Los cambios que pueden afectar a las DMUs a evaluar deben ser incluidos en dicha lista inicial. Los factores pueden ser controlables o no controlables (factores ambientales), cuantitativos o cualitativos, inputs o outputs, la lista inicial puede ser muy larga, tanto que altere las unidades comparadas resultando en un número grande de unidades con altas tasas de eficiencia.

El siguiente paso lógico, llegado el caso, debe dirigirse a depurar la gama. El primer método puede ser una sencilla tarea de discernimiento:

- ¿El factor seleccionado contribuye a uno más de uno del conjunto de objetivos establecidos para el análisis?.
- ¿El factor contiene información no incorporada en ningún otro factor?.
- ¿Los datos referentes a un factor son de rápida disponibilidad y fiabilidad?.

### C.- Ejecución del Modelo.

La fase de ejecución se aplica el modelo seleccionado. Un último paso en el proceso de refinamiento consiste en la realización de tests usando diferentes modelos DEA. Los factores que permanezcan en la lista final deben ser considerados en el modelo, cuyos resultados podrán entonces ser examinados.

## **3.- MODELOS BÁSICOS.**

En esta sección haremos una presentación y estudio comparativo de los modelos que conforman el grupo denominado “basico” en la literatura. La elección de la formulación concreta requiere dos aspectos elementales. Por un lado, la elección de la “orientación” (minimización de inputs, maximización de outputs y no orientados); por otro lado la elección de la “escala” (beneficios constantes a escala o beneficios no constantes a escala).

El Análisis envolvente de Datos (DEA) es un cuerpo de conceptos y metodologías que se han incluido en una colección de modelos básicos:

- 1º.- Modelo CCR (1978).
- 2º.- Modelo BCC (1984).
- 3º.- Modelos Multiplicativos (Charnes et al. 1982).
- 4º.- Modelos Aditivos (Charnes et al. 1985, 1987).

Lo más interesante, dada la escasa atención prestada en la literatura, son las posibilidades que se extraen de la comparación entre los modelos. Con este objetivo básico en mente realizamos un breve repaso de estos modelos básicos.

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m_1} \rightarrow DMU_1 \rightarrow y_{11}, y_{21}, \dots, y_{s_1} \\ x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m_2} \rightarrow DMU_2 \rightarrow y_{12}, y_{22}, \dots, y_{s_2} \\ \vdots \\ x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{m_n} \rightarrow DMU_n \rightarrow y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{s_n} \end{array}$$

En esencia, los modelos DEA pretenden establecer qué subconjunto de las  $n$  DMU's determinan la superficie envolvente. Su geometría vendrá prescrita por el modelo DEA empleado. Los puntos eficientes serán aquellos que se sitúen en dicha superficie, los que no, serán catalogados como ineficientes, y, el análisis DEA identificará las fuentes y cantidades de ineficiencia y proporcionará una medida relativa de la eficiencia. Dicha superficie envolvente, denominada Frontera Eficiente, sirve, por tanto para caracterizar e identificar ineficiencias.

El modelo CCR, de Charnes, Cooper y Rhodes (1978), admite las dos orientaciones (input, output).



### 3.1.1.- Modelo CCR de Orientación Input.

La formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon \cdot \vec{1}s^+ - \varepsilon \cdot \vec{1}s^- \\ \text{s.a.} \\ Y\lambda - s^+ = Y_0 \\ \theta X_0 - X\lambda - s^- = 0 \\ \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{array}$$

Donde:

- $\lambda$  es el vector que indica cuáles son las unidades eficientes de referencia para la unidad evaluada.
- $\varepsilon$  es una constante infinitésima. La presencia de dicha constante en la función objetivo permite que la minimización en  $\theta$  garantice la optimización involucrando a las variables de holgura.
- $\theta$  es el coeficiente de eficiencia. La condición necesaria para la eficiencia de la unidad evaluada exige un valor unitario para este parámetro. Si es menor que 1, la unidad sería técnicamente ineficiente, de modo que sería posible obtener el mismo nivel de producto con un menor consumo de factores.

Este modelo asume la presencia de rendimientos constantes a escala y discrecionalidad en la utilización de todos los factores productivos por parte del decisor. Permite medir, por tanto, lo que denominábamos como eficiencia técnica global (pura y mixta o de escala).

Dada una DMU ineficiente, el modelo permite seleccionar el punto de la superficie envolvente que permite la máxima reducción de input. La proyección eficiente en este caso se obtiene mediante:

$$(X_j, Y_j) \rightarrow (\hat{X}_j, \hat{Y}_j) = (\theta X_j - s^{-*}, Y_j + s^{+*})$$

La reducción proporcional de input (según el valor de  $\theta^*$ ) puede no ser suficiente por sí mismo para lograr la eficiencia<sup>5</sup>.

### 3.1.2.- Modelo CCR de Orientación Output.

La formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Max}_{\phi, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \phi + \varepsilon \cdot \vec{1}s^+ + \varepsilon \cdot \vec{1}s^- \\ \text{s.a.} \\ X\lambda + s^- = X_0 \\ \phi Y_0 - Y\lambda + s^+ = 0 \\ \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{array}$$

<sup>5</sup> Este no es el caso, dado que en un ejemplo bidimensional las variables de holgura siempre serán iguales a cero. En un espacio multidimensional podría ser necesario aumentar algunos outputs y reducir algunos inputs para alcanzar la eficiencia.

Donde:

- $\lambda$  es el vector que indica cuáles son las unidades eficientes de referencia para la unidad evaluada.
- $\varepsilon$  es una constante infinitésima.
- $\phi$  es el inverso de  $\theta$ . La condición necesaria para la eficiencia de la unidad evaluada exige un valor unitario para este parámetro. Si es mayor que 1, la unidad sería técnicamente ineficiente, de modo que sería posible aumentar el nivel de producto con el mismo consumo de factores.

El objetivo del modelo es maximizar la producción de output de la unidad evaluada. En términos de la formulación del modelo, se pretende alcanzar tanta expansión de  $Y_0$  como sea posible mediante la optimización en el parámetro  $\phi$ .

Tanto este modelo, de orientación output, como el anterior, de orientación input, presentan la misma superficie envolvente, si bien, las proyecciones eficientes, son diferentes. La proyección eficiente en este caso se obtiene mediante:

$$(X_j, Y_j) \rightarrow (\hat{X}_j, \hat{Y}_j) = (X_j - s^{-*}, \phi Y_j + s^{+*})$$

### 3.2.- El Modelo BCC.

#### 3.2.1.- Modelo BBC de Orientación Input.

La formulación es la siguiente:

$\begin{aligned} \text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} \quad & z_0 = \theta - \varepsilon \cdot \vec{1}s^+ - \varepsilon \cdot \vec{1}s^- \\ \text{s.a.} \quad & Y\lambda - s^+ = Y_0 \\ & \theta X_0 - X\lambda - s^- = 0 \\ & \vec{1}\lambda = 1 \\ & \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{aligned}$
--

Se trata de un modelo que asume rendimientos variables a escala. Este supuesto tiene su reflejo en la restricción del parámetro  $\vec{1}\lambda = 1$ . El parámetro  $\theta$  es la reducción proporcional aplicada a todos los inputs de la unidad evaluada (la DMU<sub>0</sub>). Esta reducción se aplica simultáneamente a todos los inputs y da lugar a un movimiento “radial” hacia la frontera eficiente. Conocida la eficiencia

técnica global (modelo CCR-I), podemos calcular la eficiencia técnica pura mediante el cociente de

los valores óptimos de ambos modelos:  $\frac{\theta_{CCR-I}^*}{\theta_{BCC-I}^*}$

El proceso de optimización se puede caracterizar como un proceso de dos etapas:

- En la primera etapa, tiene lugar la máxima reducción posible de los inputs, a través del valor óptimo de  $\theta$ .
- En la segunda etapa, se produce un movimiento hacia la frontera eficiente hasta alcanzarla, a través de las variables de holgura.

Naturalmente, para que una DMU sea eficiente deben cumplirse dos condiciones: Que  $\theta^* = 1$ , y que se anulen todas las variables de holgura. Alternativamente, podemos decir que una DMU es eficiente sí y sólo sí, se verifica que  $z_0^* = w_0^* = 1$ . Las holguras no negativas y el valor de  $\theta^* \leq 1$ , identifican las fuentes y cantidad de cualquier ineficiencia que se pueda presentar. La proyección eficiente en este caso se obtiene mediante:

$$(X_j, Y_j) \rightarrow (\hat{X}_j, \hat{Y}_j) = (\theta^* X_j - s^{-*}, Y_j + s^{+*})$$

### 3.2.2.- Modelo BCC de Orientación Output.

La formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Min}_{\phi, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \phi + \varepsilon \cdot \vec{1}s^+ + \varepsilon \cdot \vec{1}s^- \\ \text{s.a.} \\ X\lambda + s^- = X_0 \\ \phi Y_0 - Y\lambda + s^+ = 0 \\ \vec{1}\lambda = 1 \\ \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{array}$$

El objetivo del modelo es maximizar la producción de output sin exceder los niveles de recursos dados. En términos de la formulación del modelo, se pretende alcanzar tanta expansión de  $Y_0$  como sea posible mediante la optimización en el parámetro  $\phi$ .

Tanto este modelo, de orientación output, como el anterior, de orientación input, presentan la misma superficie envolvente. Ahora bien, las proyecciones eficientes, son diferentes. La proyección eficiente en este caso se obtiene mediante:

$$(X_j, Y_j) \rightarrow (\hat{X}_j, \hat{Y}_j) = (X_j - s^{-*}, \phi Y_j + s^{+*})$$

La diferencia no es más que un reflejo de sus orientaciones: reducción de input frente a aumento de output. No obstante, las caracterizaciones de las unidades son idénticas: valor unitario de la función objetivo con todas las holguras iguales a cero. En particular, una DMU es clasificada como ineficiente con una orientación output sí y sólo sí lo es en el modelo de orientación input aplicado a los mismos datos.

Cabe destacar la siguiente relación entre los modelos BCC y CCR: Si una unidad es caracterizada como eficiente por el modelo CCR, también lo será por el modelo BCC. La implicación contraria no es necesariamente cierta.

### 3.3.- El Modelo Aditivo.

Se trata del modelo de Charnes, Cooper, Golany, Seiford y Stutz (1985):

La formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Min } z_0 = -\vec{1}s^+ - \vec{1}s^- \\ \lambda, s^+, s^- \\ \text{s.a.} \\ Y\lambda - s^+ = Y_0 \\ -X\lambda - s^- = -X_0 \\ \vec{1}\lambda = 1 \\ \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{array}$$

El valor óptimo,  $z_0^* = w_0^*$ , conduce a un ratio de eficiencia que mide la distancia de una DMU hasta la frontera. Por tanto, la unidad evaluada,  $DMU_0$ , será eficiente sí y solo sí,  $z_0^* = w_0^* = 0$ . Por contra,  $DMU_0$ , será ineficiente si cualquier componente de las variables de holgura,  $s^+$  ó  $s^-$ , es distinta de cero; los valores de estos componentes no negativos identifican las fuentes y cantidades de ineficiencia en los inputs y outputs correspondientes.

El proceso se repite n veces, una para cada DMU evaluada. Los valores de la función objetivo establecen una partición entre DMUs eficientes e ineficientes.

Cada unidad ineficiente,  $DMU_j$ ,  $(X_j, Y_j)$ , lleva asociado un punto de comparación óptimo en la superficie envolvente,  $(\hat{X}_j, \hat{Y}_j)$ . Los valores óptimos para las variables de holgura,  $(s^{+*}, s^{-*})$ , obtenidos tras la resolución del problema primal, miden la distancia desde  $(X_j, Y_j)$  hasta  $(\hat{X}_j, \hat{Y}_j)$ :

$$(X_j, Y_j) \rightarrow (\hat{X}_j, \hat{Y}_j) = (X_j - s^{-*}, Y_j + s^{+*})$$

El modelo aditivo selecciona el punto de la superficie envolvente que maximiza la distancia en dirección noroeste.

El modelo conduce a una interpretación geométrica alternativa cuya consecuencia más directa es la presencia de beneficios variables a escala. La explicación se halla en la presencia de la restricción de convexidad,  $\vec{1}\lambda = 1$ <sup>6</sup>. Otra consecuencia interesante de tal restricción es que la clasificación de una DMU como eficiente o ineficiente no queda afectada por cambios de origen (invarianza ante una traslación de los valores  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ).

### 3.4.- El Modelo Multiplicativo.

Como característica principal, los modelos multiplicativos conducen a superficies envolventes de tipo log-lineal o Cobb-Douglas.

El modelo multiplicativo de Charnes, Cooper, Seiford y Stutz (1987) resulta de la aplicación del modelo aditivo a los logaritmos de los valores originales. Lo visto en el caso aditivo es aplicable aquí solo que en el espacio logarítmico.

La formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z_0 = -\vec{1}s^+ - \vec{1}s^- \\ & \lambda, s^+, s^- \\ \text{s.a.} & \\ & \vec{\log(Y)}\lambda - s^+ = \vec{\log(Y_0)} \\ & \vec{\log(X)}\lambda + s^- = \vec{\log(X_0)} \\ & \vec{1}\lambda = 1 \\ & \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{array}$$

Veamos dos consideraciones interesantes con relación al modelo aditivo. En primer lugar, la propiedad de invarianza del modelo aditivo, válida para los datos transformados, es equivalente a

invarianza ante cambios de escala para los datos originales. En segundo lugar, frente a la superficie lineal del modelo aditivo, en el modelo multiplicativo tenemos una superficie Cobb-Douglas.

Un modelo multiplicativo interesante que precede al visto se deduce de eliminar la restricción de convexidad. La formulación de este modelo, desarrollada originalmente por Charnes, Cooper, Seiford y Stutz (1982) es la siguiente:

La formulación es idéntica salvo por la ausencia de la restricción de convexidad. El resultado de tal acción es la reducción del número de unidades eficientes y, más importante aún, el modelo queda restringido a beneficios constantes a escala.

### ***3.5.- Principales Resultados y Extensiones de los Modelos Básicos.***

Una cuestión fundamental es que la selección del modelo y su orientación afecta a los resultados. Las elecciones clave para los modelos básicos analizados son la superficie envolvente y la proyección de las DMUs ineficientes.

Básicamente, un analista debe elegir entre el modelo de beneficios constantes a escala (CCR) o variables (BCC y modelos aditivos). Dada la superficie envolvente, otro aspecto crucial es la proyección hacia la frontera eficiente; para los modelos BCC y CCR, esto equivale a seleccionar una orientación output o input.

Como hemos podido observar, la selección del modelo conlleva una elección implícita entre tres tipos de superficie envolvente:

- El modelo CCR da lugar a una superficie lineal con beneficios constantes a escala.
- Los modelos Aditivos y BCC, conducen a una superficie lineal con beneficios variables a escala.
- Los modelos multiplicativos, a una superficie log-lineal.

Las restricciones sobre los beneficios a escala se pueden interpretar en términos del parámetro  $\lambda$ . Así, para las superficies lineales (modelos Aditivos, CCR y BCC), la ausencia de restricción corresponde a una escala constante. La presencia de restricción, es decir, la restricción de convexidad ( $\sum \lambda_i = 1$ ), admite una escala variable.

---

<sup>6</sup> Charnes et all (1994) pág. 28

En definitiva, la elección del modelo DEA determina numerosos aspectos:

- Las propiedades implícitas de la escala en los beneficios.
- La geometría de la superficie envolvente.
- La proyección eficiente.

Las extensiones de los modelos básicos del DEA han adquirido especial relevancia en los últimos años, y responden a la necesidad de reflejar aspectos de tipo organizacional, mejorar las estimaciones de la eficiencia y superar ciertas inconsistencias. Son aplicables a cualquiera de los modelos DEA.

### 3.5.1.- *Outputs e Inputs no Discrecionales.*

Hasta aquí, hemos asumido que todos los inputs y outputs son discrecionales, es decir, que están bajo control del productor. Sin embargo, en cualquier situación real pueden existir outputs o inputs no discrecionales, es decir, fijados exógenamente y fuera del control del productor<sup>7</sup>. La clave para el correcto tratamiento matemático de una variable no discrecional reside en que la información sobre hasta qué punto se puede reducir un input discrecional es insignificante para el productor. Supongamos que podemos construir una partición de los inputs y outputs en Discrecionales (D) y No Discrecionales (ND). La formulación del modelo CCR-Input con variables no discrecionales sería:

$$\begin{array}{l}
 \text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon \cdot \bar{1}s^+ - \varepsilon \cdot \bar{1}s^- - \varepsilon s^{\text{nd}} \\
 \text{s.a.} \\
 Y\lambda - s^+ = Y_0 \\
 \theta X_0 - X\lambda - s^- = 0 \\
 X_0^{\text{nd}} - X^{\text{nd}}\lambda - s^{\text{nd}} = 0 \\
 \lambda, s^+, s^-, s^{\text{nd}} \geq 0
 \end{array}$$

Como podemos observar, los Inputs y Outputs no discrecionales no están presentes en la función objetivo: al no estar bajo el control del productor de la DMU, no deben intervenir en el cómputo del coeficiente de eficiencia. Su sitio exacto se halla en las restricciones.

<sup>7</sup> Nos limitaremos a aspectos relacionados con la inclusión de las variables no discrecionales en la formulación del modelo. Una visión más detallada del problema que plantean tales variables, y su distinción respecto a factores de tipo ambiental, puede hallarse en Muñiz Perez, M.A°.

### 3.5.2.- Outputs e Inputs Categóricos.

En las páginas anteriores hemos supuesto que todos los inputs y outputs son variables continuas. De nuevo, las situaciones reales implican frecuentemente el uso de variables ordinales para medir, por ejemplo, la presencia o ausencia de cierta opción. A veces, la representación de la variable en cuestión responde mejor a niveles de tipo discreto como, por ejemplo, las categorías de tipo poblacional. Estas variables discretas ordinales (dummy) fueron incorporadas originalmente por Banker y Morey (1986).

Supongamos que, dado un conjunto de  $n$  unidades, un input puede asumir  $L$  niveles  $(1, 2, \dots, L)$ . Estos  $L$  niveles, dan lugar a una partición del conjunto de DMUs:  $D_1, D_2, \dots, D_L$ . El problema consiste en que la evaluación de una DMU debe hacerse respecto a la superficie envolvente configurada a partir de las unidades contenidas en su categoría y en las categorías precedentes. Por ejemplo, trabajando con el modelo aditivo, dada la  $DMU_0$  perteneciente a la categoría  $K$ , la siguiente formulación permite su evaluación respecto a las unidades contenidas en  $\bigcup_{i=1}^{i=K} D_i$ :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min}_{\lambda_j, s_r^+, s_r^-} & - \left( \sum_{r=1}^{r=s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{i=m} s_i^- \right) \\
 \text{s.a.} & \\
 & \sum_{\substack{j \in \bigcup_{i=1}^K D_i \\ r=1}} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & - \sum_{\substack{j \in \bigcup_{i=1}^K D_i \\ i=1}} x_{ij} \lambda_j - s_i^- = -x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j \in \bigcup_{i=1}^K D_i \\ i=1}} \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0 \quad j \in \bigcup_{i=1}^{i=K} D_i
 \end{array}$$

La especificación del modelo se basa en el supuesto de que hay una jerarquía natural de las categorías. Cada DMU debe ser comparada solamente con aquellas DMUs de su categoría o de categorías inferiores, es decir, las que operan bajo las mismas o peores condiciones. En caso de que las categorías no sean comparables, deberá realizarse un análisis por separado para cada una de ellas.



#### 4.- CONCLUSIONES.

Si por algo destaca la metodología DEA es porque efectúa sus estimaciones e inferencias directamente de los datos. Su orientación, claramente dirigida hacia la obtención de la “mejor práctica” y la optimización de las unidades, permite nuevas formas de organizar y analizar los datos.

La metodología DEA pone su atención en las observaciones individuales y genera una medida agregada para cada DMU en términos de su uso de recursos para producir los outputs deseados. Es lo suficientemente flexible para permitir la introducción de consideraciones adicionales (variables exógenas, variables categóricas, etc.). No es necesario especificar a priori las ponderaciones ni los precios de los outputs e inputs. Las estimaciones son óptimas, desde el punto de vista paretiano, y especifican los cambios en inputs y/o outputs necesarios para proyectar las unidades ineficientes hasta la frontera eficiente.

La mayoría de los trabajos enmarcados en la literatura, han utilizado el DEA para evaluar la eficiencia de entidades gubernamentales o no lucrativas envueltas en actividades que han probado su resistencia a otros métodos de inferencia y evaluación. Sin embargo, como señala W.W. Cooper (1999), *“los conceptos deben modificarse y las herramientas reorientarse de manera que se puedan emplear para efectuar inferencias ex-post con fines de evaluación y control”*. En su trabajo, se presenta una aproximación en la que las aproximaciones DEA se combinan con regresiones estocásticas en un proceso de dos etapas. En la primera, se aplica el DEA a los datos para distinguir entre las observaciones asociadas a unidades eficientes y las asociadas a unidades ineficientes. En la segunda, los resultados de la etapa anterior se incorporan como variables discretionales (dummy) en las regresiones a estimar mediante mínimos cuadrados ordinarios o fronteras estocásticas.

Según J.K. Sengupta (1996) *“los modelos DEA han experimentado, en los últimos años, nuevos desarrollos en varias direcciones”*. Destaca, desde el punto de vista teórico, la generalización de los modelos DEA en términos de Frontera de Producción Dinámica. Las “nuevas” aplicaciones de los modelos DEA son las de tipo estadístico, que abren un campo de trabajo muy reciente. Las aplicaciones “tradicionales”, según Sengupta, se pueden englobar en tres subcampos:

- El desarrollo de criterios para establecer un ranking de eficiencia de las organizaciones públicas y cuasi-públicas.
- La comparación de las aproximaciones DEA con las estimaciones frontera obtenidas mediante técnicas econométricas y el método de mínimos cuadrados ordinarios.
- La combinación de los modelos DEA con otras aproximaciones (técnicas de variables dummy, correlación canónica, etc.)

En un trabajo de Thanassoulis et al. (1999), los autores desarrollan un método para descomponer el éxito escolar en dos componentes: uno imputable al alumno y otro al Centro. Según reconocen, la principal etapa es la identificación de las variables contextuales, empleadas para permitir la “*presencia de factores no controlables por el alumno o por el centro pero que afectan al éxito escolar*”.

Finalmente, y por lo que se refiere al Sector Educativo, conviene distinguir entre la metodología DEA y la modelización multiobjetivo. Como señala Thanassoulis (1999), “*cuando se dispone de datos sobre el nivel escolar, la modelización multiobjetivo se emplea para estimar los resultados esperados a diferentes niveles jerárquicos*”. Se trata de una técnica de regresión que permite descomponer la variación de éxito escolar en proporciones imputables a cada nivel (alumnos, centros, etc.). Destaca, fundamentalmente, cuatro aspectos:

- La metodología DEA no necesita especificar forma funcional alguna.
- Los supuestos en cuanto a la distribución estadística de las variables a estimar no son necesarios en el DEA, ya que es una técnica no paramétrica.
- El DEA puede manipular múltiples variables explicativas y múltiples variables dependientes, por lo que la naturaleza multi-resultado del proceso educativo se puede modelizar mucho más apropiadamente.
- El DEA es un método frontera, es decir, se estiman resultados máximos y no promedios.

## REFERENCIAS

- Boaz Golany, Gang Yu, “Estimating returns to scale in DEA” *European Journal of Operational Research* 103 28-37 (1997)
- Charnes, A., Cooper, W.W. y Rhodes, E., “Evaluating program and managerial efficiency: an application of data envelopment analysis to program follow through” *Management Science* Vol. 27, Nº 6, junio 1981
- Charnes, A., Cooper, W.W. y Rhodes, E., “Measuring the efficiency of decision making units” *European Journal of Operational Research* 2, 429-444, 1978.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M., “Data envelopment analysis: Theory, Methodology and Applications” *Kluwer Academic Publishers* 1994.
- Cooper, W.W. y Tone, K., “Measures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation” *European Journal of Operational Research* 99 72-88 (1997).
- Farrell, M.J., “The Measurement of Efficiency Productive”, *Journal of the Royal Statistical Society* (1957).

- Mancebón Torrubia, M.J. “Potencialidades de las Técnicas no Paramétricas como Método de Mejora de la Gestión de los Centros”.
- Mancebón Torrubia, M.J. “La Medición de la Eficiencia de los Centros de Enseñanza Secundaria. Una Aplicación del Método DEA”.
- Muñiz Pérez, M.A., “Inputs no discrecionales o variables medioambientales?. Su inclusión en el análisis DEA” *VI Encuentro de Economía Pública* febrero 1999.
- Pedraja Chaparro, F. y Salinas Pérez, J., “El análisis envolvente de datos y su aplicación al sector público: una nota introductoria”.
- Pedraja Chaparro, F. y Salinas Pérez, J. y Smith, P., “La restricción de las ponderaciones en el análisis envolvente de datos: una fórmula para mejorar la evaluación de la eficiencia” *Investigaciones Económicas* Vol. XVIII (2), 365-380, Mayo 1994.
- Read, L. y Thanassoulis, E., “Testing for the nature of returns to scale in data envelopment analysis” *Warwick Business School Research Papers* Junio 1999.
- Read, L. y Thanassoulis, E., “A comparison of data envelopment analysis (DEA) and stochastic frontiers (SF) under variation of Fit” *Warwick Business School Research Papers* 1999.
- Sarrico, C.S. y Dyson, R. “The use of virtual weights restrictions in data envelopment analysis” *Warwick Business School Research Papers* Junio 1999.
- Seiford, L.M. “On alternative optimal solutions in the estimation of returns to scale in DEA” *European Journal of Operational Research* 108 149-152 (1998)
- Sengupta, J.K., “Recent models in data envelopment analysis: theory and applications” *Applied Stochastic Models and Data Analysis* Vol. 12, 1-26 1996
- Thanassoulis, E. et al., “Decomposing pupil under attainment into pupil and school componets” *Aston Business School Research Institute* Junio 1999.

## **ANEXO**

### **MEDICIÓN DE LA EFICIENCIA DE DEPARTAMENTOS UNIVERSITARIOS**

#### ***INTRODUCCIÓN.***

Con objeto de ofrecer una perspectiva de la situación actual de la Universidad de Murcia, vamos a aplicar la técnica no paramétrica de Análisis Envolvente de Datos (DEA). Se han utilizado datos correspondientes a 67 Departamentos de la Universidad de Murcia durante el curso 1998-99.

Tres son las principales etapas a considerar en un estudio aplicado de eficiencia:

#### **1.- Definir y seleccionar las unidades a evaluar.**

Las unidades a evaluar deben manifestar cierto grado de homogeneidad en su estructura de funcionamiento. Es decir, se supone que producen el mismo tipo de outputs mediante el empleo del mismo tipo de recursos o inputs.

Su número debe ser lo suficientemente elevado como para que sea posible discriminar entre ellas. Si su número es pequeño en proporción al número de variables consideradas (inputs y outputs), el número de unidades eficientes será elevado.

#### **2.- Seleccionar los inputs y outputs a usar.**

Esta es seguramente la tarea más a acometer en un análisis de eficiencia: qué inputs y outputs incluir. La lista debe reducirse hasta lograr los más relevantes para la evaluación de las unidades.

El análisis permite considerar el tratamiento de variables que no representan ni un recurso económico ni un producto, sino, más bien, un factor ambiental. En este sentido, los inputs pueden ser de dos tipos: controlables (o discrecionales) y/o no controlables (no discrecionales), según si la unidad

evaluada tiene o no el control sobre su nivel. En nuestro ejemplo se han considerado dos inputs y tres outputs:

### **Inputs:**

En el ámbito universitario, se suele trabajar con dos tipos de recursos: capital humano, representado principalmente por el profesorado, y capital físico (o no humano). Se ha recogido uno para cada tipo, en concreto:

Plantilla: Se trata del número de profesores equivalentes a tiempo completo. Se obtiene como el número de profesores a tiempo completo más 0,5 veces el número de profesores a tiempo parcial<sup>8</sup>.

Presupuesto: Se trata del presupuesto total anual en pesetas gestionado por cada departamento.

### **Outputs:**

La definición y medida de los outputs universitarios entraña mayor dificultad, puesto que los resultados trascienden ampliamente a los beneficiarios directos (los estudiantes) y redundan sobre el resto de la sociedad de diversas formas. Aún así, se puede hablar básicamente de dos tipos de producto: enseñanza e investigación.

Número de Créditos: Número total de créditos impartidos por el departamento<sup>9</sup>.

Calidad Docente: Nota media obtenida por cada departamento en la evaluación de la docencia realizadas periódicamente en forma de encuestas por los alumnos.

Investigación: total de puntuación por producto para cada departamento. Se construye como suma de diversos resultados obtenidos a lo largo de cada año, e incluye aspectos tales como: artículos, libros, capítulos de libros, congresos, proyectos de investigación, tesinas y tesis doctorales, patentes, etc.<sup>10</sup>

### **3.- Seleccionar el modelo de optimización.**

---

<sup>8</sup> En un estudio más amplio, sería interesante desdoblar la información sobre la plantilla en varios inputs, con objeto de establecer distinciones por tipo de contrato, categoría académica, etc.

<sup>9</sup> Los departamentos podrían separarse en experimentales y no experimentales. El grado de experimentalidad del departamento puede afectar a la medida de la eficiencia. En un tratamiento más refinado, y dada la flexibilidad de las técnicas de análisis no paramétricas, se podría incluir una variable categórica de tipo discreto (propuestas por Banker en 1986) para hacer referencia a la experimentalidad o no del departamento analizado.

<sup>10</sup> Otra posibilidad consiste en separar este producto total en varios outputs. Esto puede resultar complejo dado que algunos productos, como las tesis o proyectos de investigación, tienen períodos de referencia distintos.

La técnica DEA se apoya en la programación matemática para construir una frontera de producción empírica. Dicha frontera queda configurada por las unidades que muestran un “mejor comportamiento” y a partir de ella se puede determinar y medir la eficiencia del resto.

El desarrollo de dicha técnica en los últimos años ha sido considerable y la gama de modelos disponible es muy amplia, debido sobre todo a la enorme flexibilidad metodológica que permite modelizar situaciones atendiendo a prácticamente todos los detalles inherentes del sector y unidades a evaluar.

Básicamente, podríamos resumir el problema mediante dos elecciones fundamentales:

#### Escala de los Beneficios

Debemos decidir si, al evaluar la eficiencia de las unidades productivas, vamos a asumir una escala de beneficios constantes o variables. Se trata de decir qué sucede con la producción de los outputs cuando cambian las cantidades de inputs empleadas. Así, si al doblar el empleo de todos los inputs se dobla la producción de todos los outputs, estaremos ante beneficios constantes a escala. La elección es por tanto importante, ya que puede explicar en parte la eficiencia relativa de cada unidad.

Trabajaremos en primer con el supuesto de Beneficios Variables a Escala. Bajo este supuesto, la eficiencia relativa de una unidad se mide con relación a las restantes unidades que operan en una escala similar. Por contra, bajo Beneficios Constantes a Escala, la eficiencia se calcula respecto a todas las unidades sea cual sea la escala a que operen.

#### Orientación Input/Output.

Se trata de decidir si ponemos el énfasis en la reducción del input o en la expansión del output<sup>11</sup>.

La primera opción responde al criterio de “Minización del Input”. Dado el nivel de outputs que produce una unidad, nos preguntaremos cuánto podría reducir el empleo de inputs.

La segunda, al criterio de “Maximización del Output”. Dado el nivel de inputs consumido por una unidad, nos preguntaremos cuánto podría aumentar la producción de outputs.

La elección dependerá en cada caso de la situación analizada. El analista debe considerar una u otra en la medida en que la unidad evaluada tenga más o menos capacidad para actuar sobre el nivel de producción o sobre el nivel de empleo de recursos. Puede que, por ejemplo, los inputs que emplea una unidad muestren rigidez al cambio, en cuyo caso sería mejor una orientación output.

Una última cuestión tiene que ver con la posibilidad de establecer ponderaciones para algún/os inputs y/o outputs. Esta opción nos permite tener la seguridad de que al menos cierta parte de la medida de eficiencia calculada para cada unidad ha tenido en cuenta cierta variable (input/output).

En términos generales, el DEA opera para cada unidad intentando optimizar su coeficiente de eficiencia; para ello asigna a cada variable la ponderación que más favorece a la unidad bajo estudio. La posibilidad de establecer ponderaciones a priori permite decirle al análisis que para cierto input o output no puede trabajar con una ponderación inferior a la establecida. Esta práctica ha recibido diversas críticas en la literatura; el criterio global se podría resumir diciendo que su uso depende de cada caso concreto y, por supuesto, del analista, si bien, no conviene hacer un uso excesivo (dos variables a lo sumo).

#### 4.- Ejecución y Análisis del Modelo.

La información proporcionada por el modelo consta de diversos elementos. El primer objetivo consistirá en la obtención de los “coeficientes de eficiencia relativa” para cada una de las unidades. Estos coeficientes permitirán clasificar a las unidades en dos grupos: “eficientes”, las que logren un valor del 100%, y “no eficientes”, las que obtengan un coeficiente por debajo del 100%.

Una vez superado este objetivo, se procederá al análisis pormenorizado de la situación que reflejen. Este análisis debe hacerse en un doble sentido:

##### 4.1.- En primer lugar, Análisis Individual.

Para cada unidad evaluada y catalogada como ineficiente se iniciará un estudio tendente a resolver las siguientes cuestiones fundamentales:

A.- ¿Por qué?. Es decir, ¿Cuáles son, a la vista de los datos, las razones de tales ineficiencias?.

---

<sup>11</sup> Alternativamente, cabe la posibilidad de una versión neutral, es decir, no orientada.

B.- ¿Cómo alcanzar la eficiencia?. Para cada unidad ineficiente, la técnica indicará las pautas a seguir para lograr la eficiencia, es decir, permite establecer un plan de actuación. A modo de ejemplo, el DEA es capaz de indicar que, a la vista del comportamiento de las unidades eficientes, cierta unidad clasificada como ineficiente debería ser capaz de producir su output actual utilizando menos cantidad de ciertos inputs. En tal caso, el análisis nos dice cuáles son los inputs concretos cuyo uso debe reducirse y, más importante aún, en qué cuantía debe hacerse. La situación específica de cierta unidad puede hacer que la viabilidad de dicho plan no sea factible a corto plazo. En cualquier caso, siempre dispondremos de una guía de actuación.

C.- Análisis del Grupo de Referencia de cada unidad. Cada unidad ineficiente se relaciona con una o varias unidades eficientes que configuran su Grupo de Referencia. Se trata de las unidades eficientes más directamente relacionadas con ella. La comparación de cierta unidad ineficiente con cada una de las unidades de su Grupo de Referencia, permite, por un lado, evitar la posibilidad de una comparación indiscriminada y, por otro, depurar el análisis y plan de actuación de las unidades ineficientes. Para ello es preciso aclarar la importancia relativa de cada unidad; con tal fin, se calculará la contribución relativa en porcentaje de cada unidad del Grupo de Referencia. Si cierta unidad ineficiente tiene dos unidades eficientes en su grupo de referencia, el análisis permite establecer que, por ejemplo, la contribución media de cada una es del 30% y 70% respectivamente. La comparación más importante debe hacerse, por tanto, con la unidad que más contribuya.

D.- Finalmente, se calcularán las contribuciones de cada input y output. El análisis muestra información sobre el énfasis que ha puesto en cada input y output. Se trata de un indicador útil para conocer qué variables han resultado más determinantes en el coeficiente de eficiencia de cada unidad. En algunos casos, puede servir para validar el coeficiente calculado.

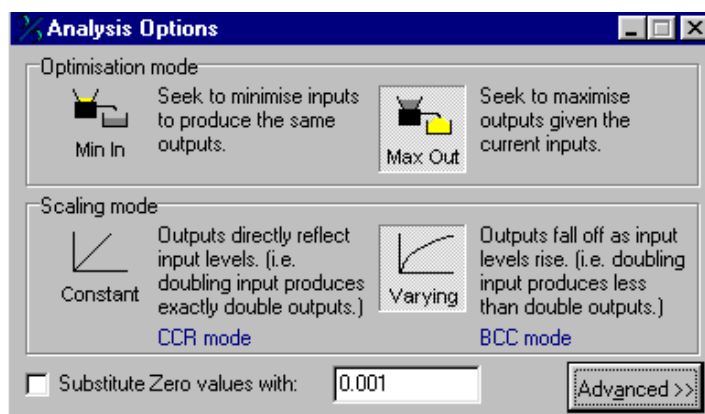
4.2.- En segundo lugar, Análisis Colectivo.

A continuación, se llevará a cabo un análisis global, es decir, teniendo en cuenta todas las unidades en conjunto. Con el riesgo que conlleva sintetizar la información, el análisis colectivo nos proveerá de una visión de conjunto de la situación.

***El MODELO BCC-O (Benef. Variables – Max. Output).***



Una vez elaborada la información en Excel, se exporta al programa empleado: el Frontier Analyst Professional v. 2.0.0 (1999). Debemos decidir entonces la forma del modelo de optimización a emplear. Pulsando el botón “DEA options” aparece el siguiente menú que permite escoger el Modelo de Optimización que deseamos:



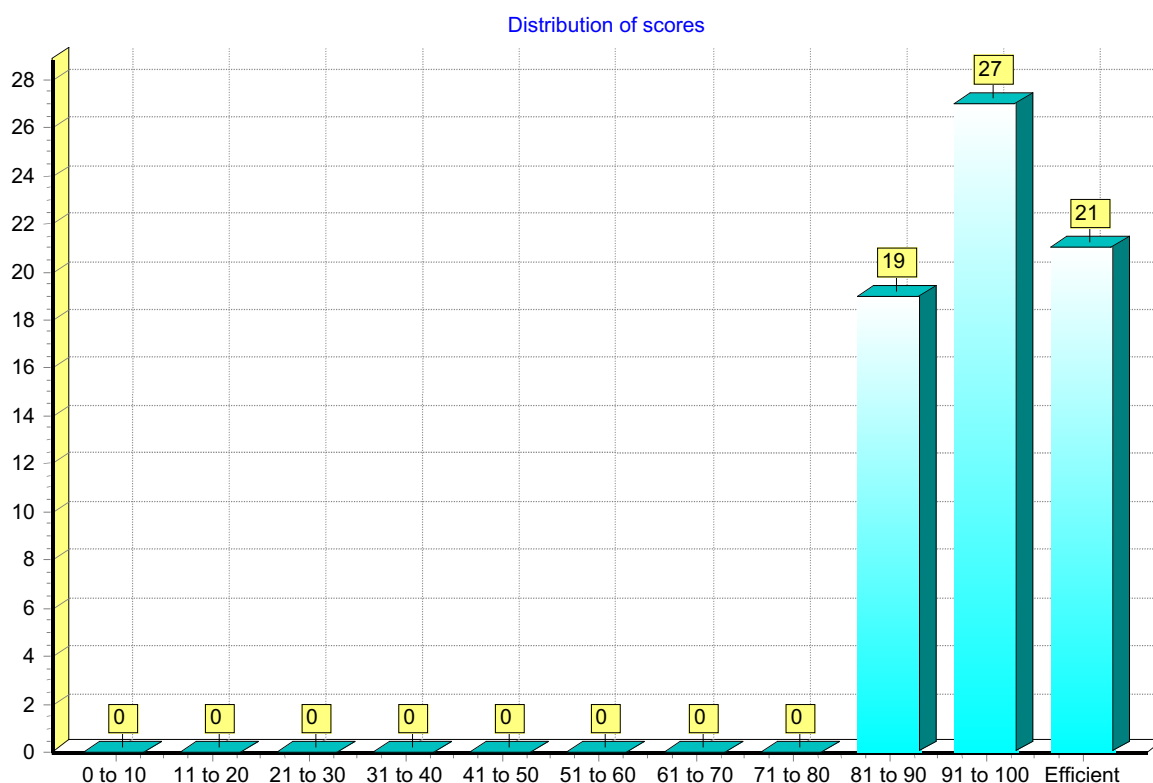
Hay dos elecciones a considerar más una opción:

- “Scaling Mode”: Podemos asumir beneficios constantes a escala (Modelo CCR) o, alternativamente, beneficios variables a escala (modelo BCC).
- “Optimisation Mode”: Podemos poner el énfasis en la reducción del input (Min In), o en la maximización del output (Max Out).
- “Advanced”: Activa un submenú que permite establecer ponderaciones.

Asumiendo para el modelo I, beneficios variables y maximización del output (BCC de orientación output), y dejando de lado la posibilidad de establecer ponderaciones, el primer resultado que ofrece el programa son los coeficientes de eficiencia:

Coeficientes de Eficiencia. Modelo BCC-Output					
Eficientes		No Eficientes			
Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia
Dpto. 04	100	Dpto. 59	99,48	Dpto. 50	91,36
Dpto. 05	100	Dpto. 18	99,28	Dpto. 58	91,27
Dpto. 06	100	Dpto. 22	98,59	Dpto. 48	91,16
Dpto. 11	100	Dpto. 34	98,41	Dpto. 32	91,13
Dpto. 12	100	Dpto. 27	98,32	Dpto. 49	90,96
Dpto. 17	100	Dpto. 64	98,01	Dpto. 35	90,93
Dpto. 19	100	Dpto. 09	97,96	Dpto. 08	90,91
Dpto. 20	100	Dpto. 33	97,71	Dpto. 31	90,40
Dpto. 23	100	Dpto. 07	97,40	Dpto. 01	89,66
Dpto. 26	100	Dpto. 61	97,00	Dpto. 63	89,54

Dpto. 29	100	Dpto. 02	96,60	Dpto. 36	89,52
Dpto. 30	100	Dpto. 54	96,39	Dpto. 21	89,46
Dpto. 37	100	Dpto. 28	96,21	Dpto. 25	89,24
Dpto. 38	100	Dpto. 40	95,93	Dpto. 15	88,55
Dpto. 43	100	Dpto. 55	95,81	Dpto. 14	87,85
Dpto. 45	100	Dpto. 67	95,66	Dpto. 24	86,65
Dpto. 46	100	Dpto. 44	95,21	Dpto. 39	86,34
Dpto. 47	100	Dpto. 62	94,36	Dpto. 13	84,66
Dpto. 51	100	Dpto. 16	94,20	Dpto. 60	84,50
Dpto. 53	100	Dpto. 66	93,85	Dpto. 65	84,12
Dpto. 56	100	Dpto. 10	93,30	Dpto. 03	82,41
		Dpto. 41	92,08	Dpto. 42	81,86
		Dpto. 52	91,97	Dpto. 57	81,07



Como vemos en el gráfico anterior, las unidades relativamente eficientes (21 departamentos) alcanzan un valor del 100%; las ineficientes (46 departamentos), por debajo del 100%. Los coeficientes de eficiencia relativa deben interpretarse teniendo en cuenta las condiciones del análisis. Por ejemplo, el departamento 50 tiene un coeficiente de 91,36%, lo que significa que sólo es un 91,36% tan eficiente como los mejores departamentos de la muestra analizada. Así pues, los coeficientes variarán en función de los departamentos, inputs y outputs considerados en el análisis.

La siguiente fase del análisis consiste en profundizar en lo acaecido con las unidades ineficientes, con objeto de hallar respuesta a preguntas tan importantes como ¿Qué pautas de actuación debería seguir una unidad ineficiente para alcanzar la eficiencia?. La opción “Details” permite un estudio pormenorizado de todas las unidades.

Agrupando los departamentos ineficientes en los tres subgrupos que se muestran en el gráfico anterior, vamos a analizar la situación de algunos de ellos:

### **Análisis Individual: El departamento 50**

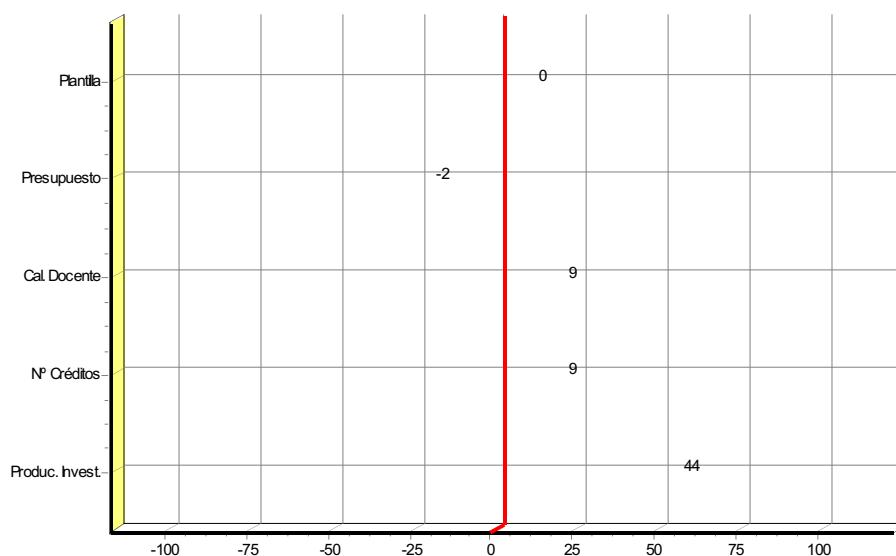
El análisis tiene lugar en un total de cuatro pasos:

- Mejoras Potenciales.
- Análisis del Conjunto de Referencia.
- Contribuciones de Referencia.
- Contribuciones Input/Output.

#### “Potential Improvements”:

El análisis no se limita a proporcionar un coeficiente de eficiencia para cada unidad, sino que, a través de esta opción, indica cuánto y en qué áreas debe mejorar una unidad ineficiente para llegar a la eficiencia. Esto permite el establecimiento de objetivos que sirvan de guía de actuación.

El programa ofrece las mejoras potenciales tanto en forma de tabla como en forma de gráfico. Como vemos en la pantalla anterior, si pulsamos sobre “Show as Graph” observamos el siguiente gráfico:

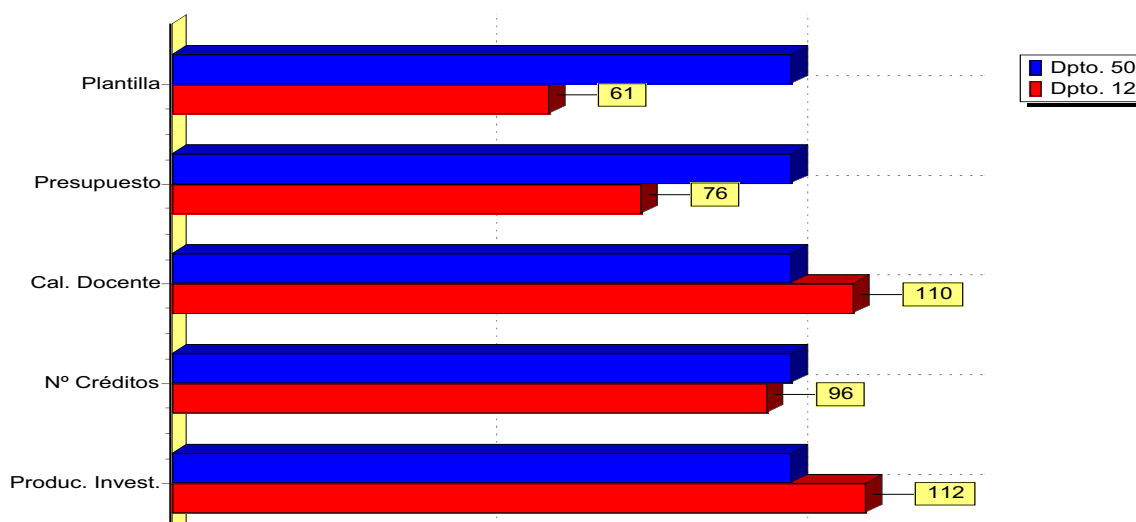
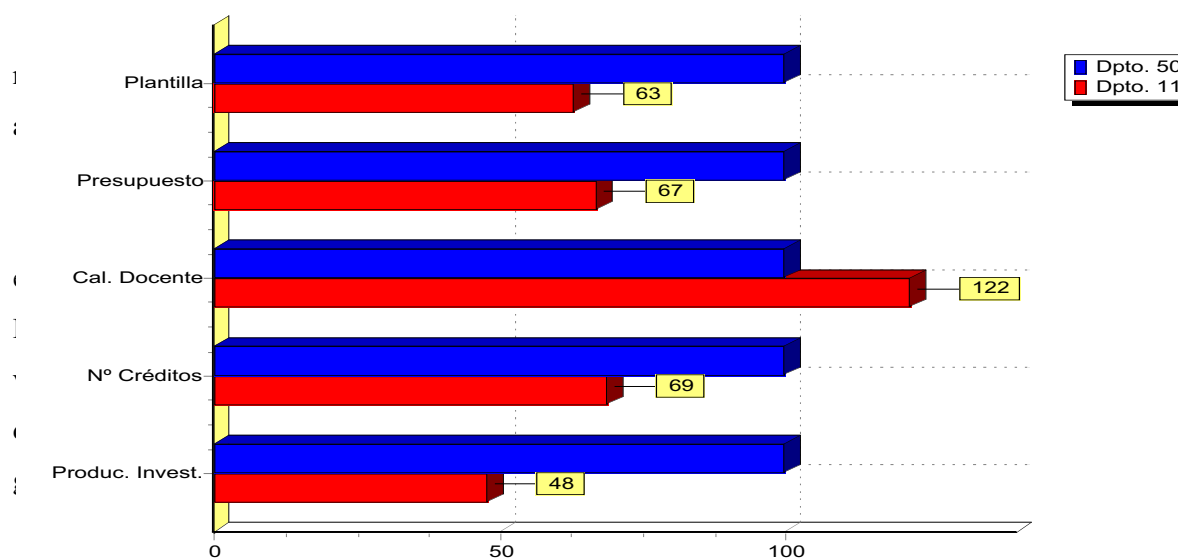


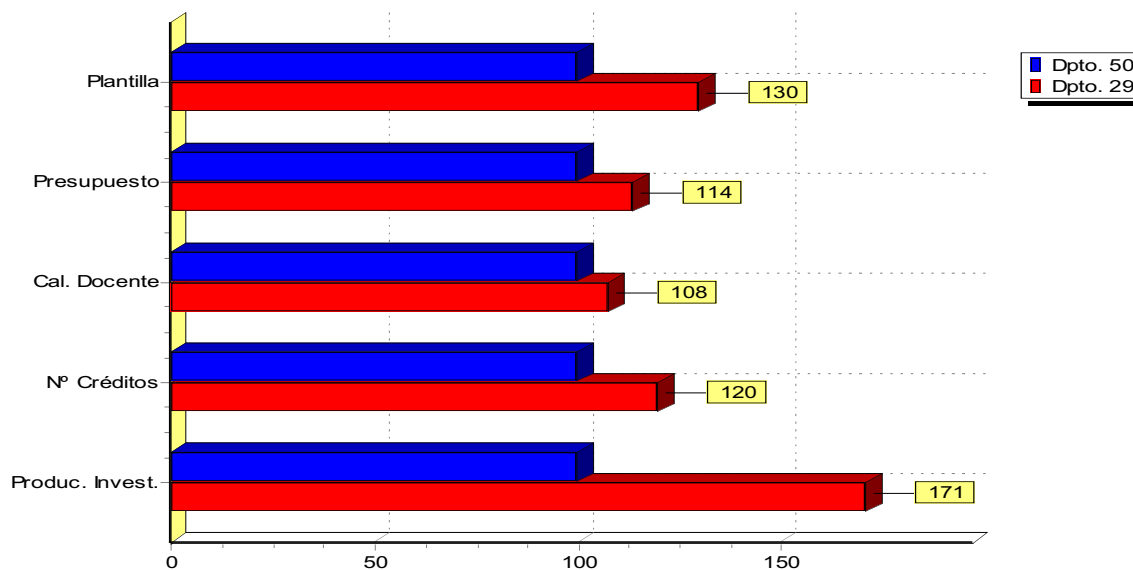
En el eje de ordenadas se muestran los inputs y outputs, y, en de abcisas la mejora potencial en porcentaje para cada input y output que necesita la unidad en cuestión para lograr la eficiencia. Para el departamento 50, el gráfico indica que necesita reducir el input de presupuesto en un 2%, así como aumenta el output de investigación en un 44%, y el de n° de créditos y calidad docente en un 9% respectivamente, para lograr la eficiencia.

Lógicamente, es preciso insistir que se trata de una simple guía. Puede que haya razones que dificulten la consecución de los objetivos propuestos.

#### “Reference Comparison”:

Esta opción muestra información sobre la unidad bajo estudio comparada con las unidades eficientes que forman su “Conjunto de Referencia”. Pulsando sobre esta opción aparece la siguiente ventana:





En el primero, observamos que el menor uso de ambos inputs por parte de la unidad eficiente 11, tiene su reflejo en el output de número de créditos impartidos y producción científica (produce un 52% menos que el departamento bajo análisis), pero no en el output de calidad docente, en el que lo supera en un 22%.

En el segundo, se observa que el menor uso de ambos inputs por parte del departamento eficiente 12, carece de su correspondiente reflejo en todos los outputs. Especialmente en el de calidad docente (con un 10% más) y producción científica (con un 12% más).

El caso más significativo se obtiene de la comparación con la unidad eficiente 29. El mayor uso de ambos inputs por parte de dicha unidad tiene su respuesta proporcionada en la producción de los outputs de calidad docente (un 8% por encima) y de créditos impartidos (un 20%), si bien la respuesta del output de producción científica es desproporcionada (supera al departamento 50 en un 71%).

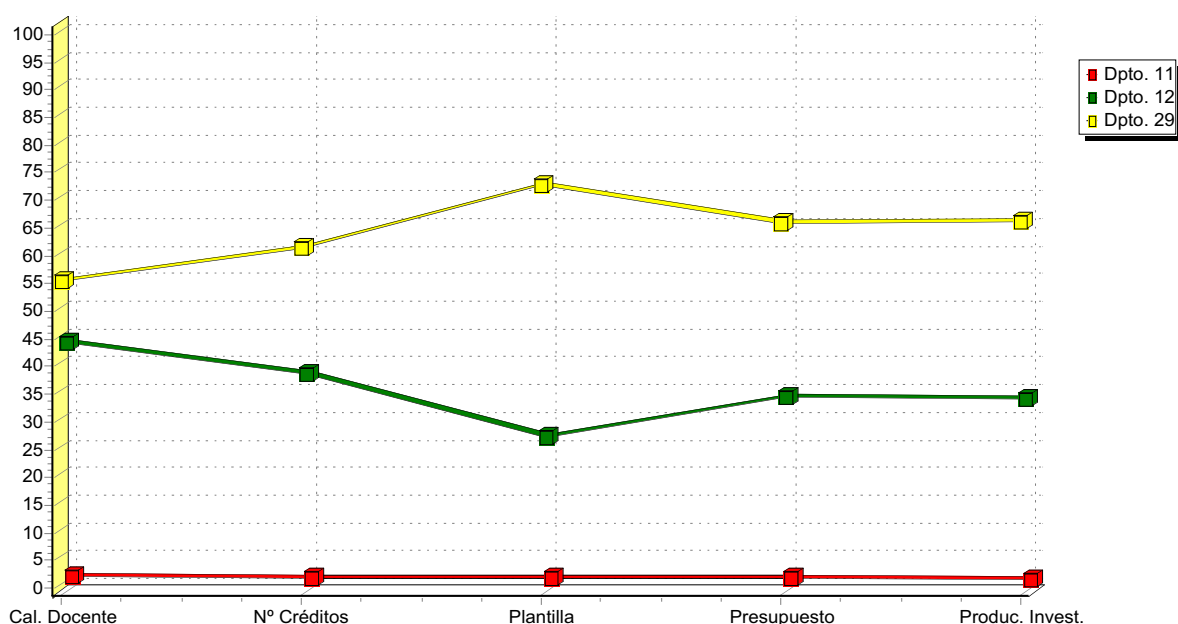
#### “Reference Contributions”.

El Conjunto de Referencia de una unidad ineficiente está formado por aquellas unidades eficientes más similares a ella. Sin embargo, no todas tienen el mismo peso a la hora de calcular el coeficiente de eficiencia de la unidad en cuestión.

La opción “Reference Contributions” representa un gráfico en el que aparecen todas las unidades del conjunto de referencia así como la contribución de cada una en términos porcentuales. El eje vertical muestra la contribución en porcentaje y el horizontal, los inputs y outputs empleados en el análisis. Para cada input y/o output, la suma de contribuciones debe ser igual a 100%.

La principal utilidad de esta opción es permite depurar la información aportada por la opción anterior (Reference Comparison). En efecto, si una unidad contribuye escasamente, no será una buena referencia a la hora de establecer comparaciones. Por otro lado, la identificación de la unidad o unidades que más contribuyen permite una mayor comprensión de la naturaleza de las ineficiencias que presente la unidad bajo estudio.

El gráfico resultante para la unidad 50 es el siguiente:



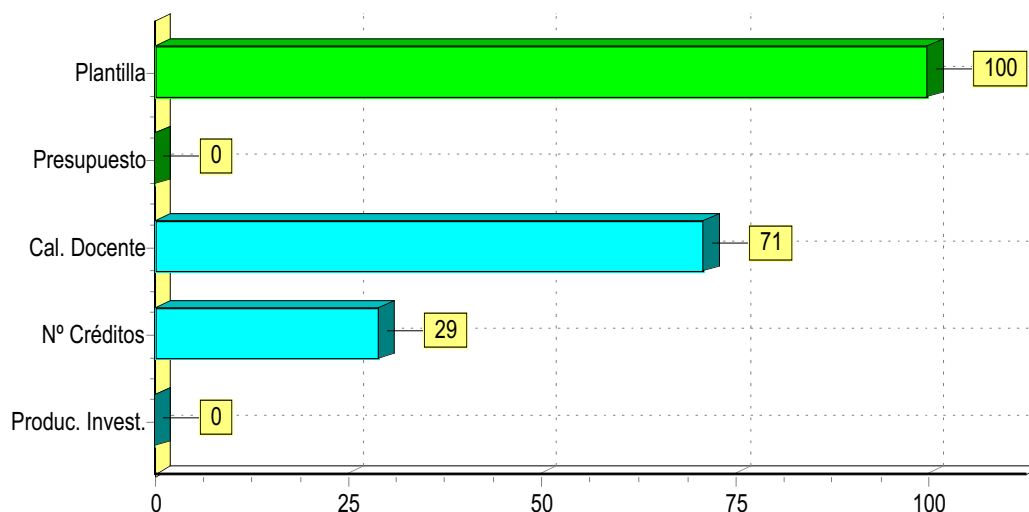
La conclusión que se extrae del gráfico es muy rotunda: la unidad ineficiente 50 tiene como Conjunto de Referencia tres departamentos: 11, 12 y 29. De ellos, el que más peso tiene es el 29 (con un peso del 56%), seguido del 12 (con un 43%). El departamento 11 apenas tiene peso (un 1%).

Las consecuencias extraídas en el apartado anterior pueden ahora valorarse de una forma mucho más completa.

“Input/Output Contributions”.

Esta opción muestra información sobre el peso relativo de cada uno de los inputs y outputs. Permite saber, por tanto, qué inputs y outputs se han empleado en el cálculo de la eficiencia, y cuáles, en su caso, han sido ignorados. Los valores se muestran normalizados como porcentajes.

En el caso del departamento 50 el gráfico es el siguiente:



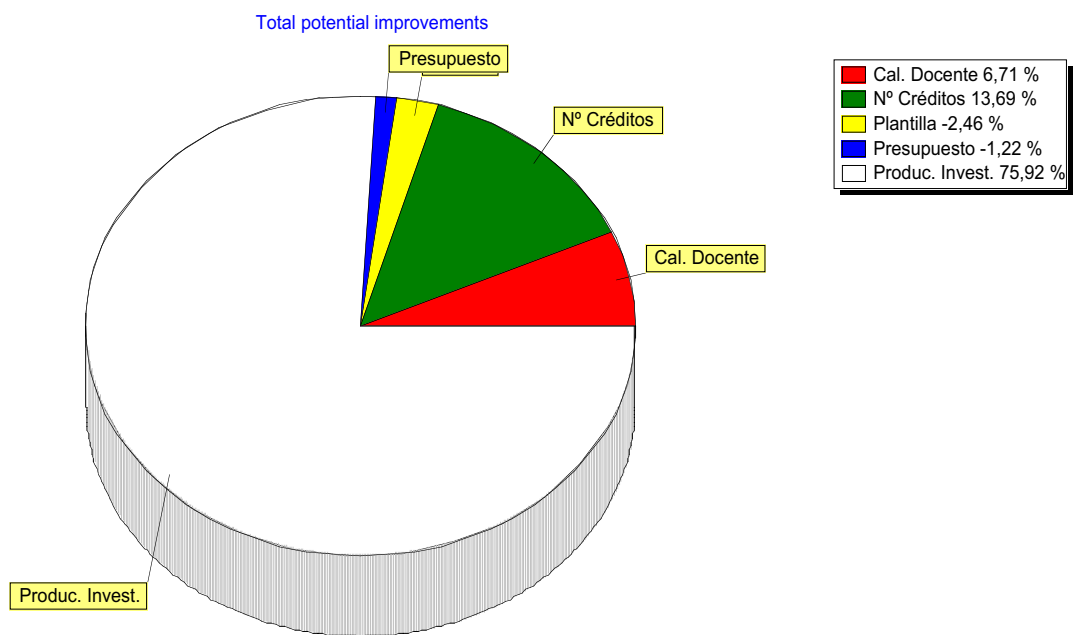
La mayor contribución se halla en el input plantilla, 99,99%; el otro input, por contra, tan solo logra un 0,0011%.

Por el lado de los outputs, la calidad docente se sitúa en primer lugar con un 70,72%, seguida del número de créditos impartidos, 29,27% y, a gran distancia, la producción científica, con un 1,09%.

### Análisis Colectivo:

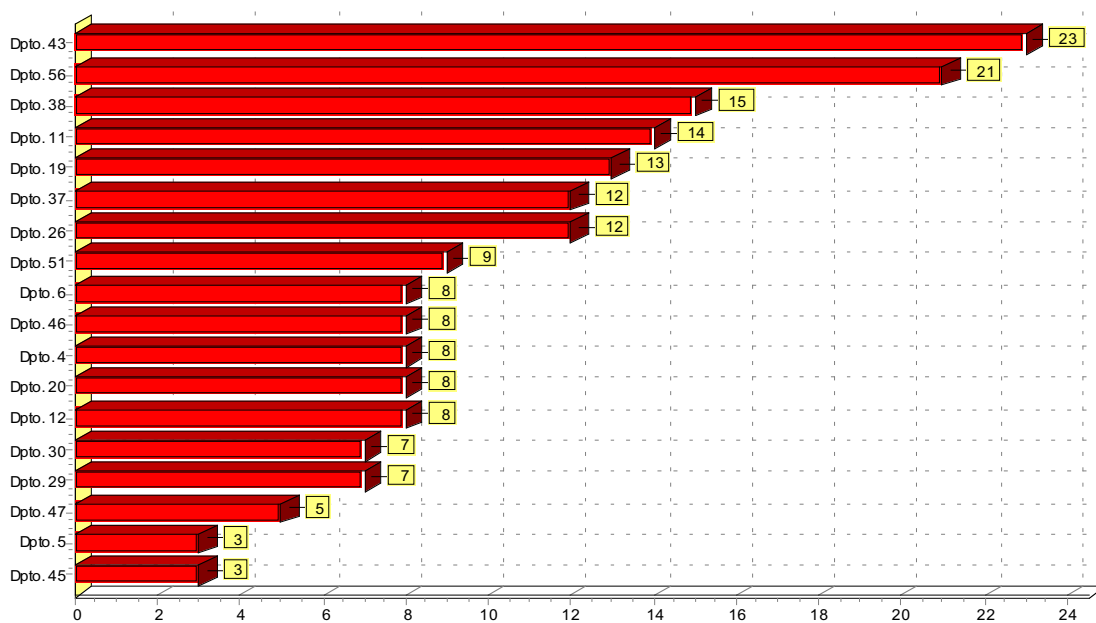
El análisis colectivo de los departamentos incluidos en el análisis comienza con una representación gráfica que muestra las mejoras potenciales para cada input y output considerando todos los departamentos de manera global.

A pesar del riesgo que conlleva todo proceso de reducción de información, el gráfico se muestra útil a la hora de saber qué variables merecen un tratamiento más detallado. En nuestro caso, la variable de Producción Investigadora se revela como la principal tarea pendiente a resolver. En general, puede establecerse una línea de actuación:



Otro aspecto interesante dentro del análisis colectivo, consiste en estudiar el número de veces que una determinada unidad eficiente ha formado parte del conjunto de referencia de las unidades ineficientes.

Si cierto departamento tiene una frecuencia de aparición elevada, estaremos ante un ejemplo de buen funcionamiento. Se trataría del “líder global”, es decir, un departamento que sirve a los demás como ejemplo de práctica a seguir.





En cuanto a las unidades eficientes que aparecen pocas veces en los conjuntos de referencia del resto de unidades ineficientes, probablemente combinan sus outputs e inputs de una manera inusual y no son ejemplos tan buenos en cuanto a práctica a emular.

Un último aspecto de interés es el estudio del alcance de la eficiencia de los departamentos con relación a los inputs y outputs. Es decir, vamos a estudiar la relación entre la cantidad que un departamento emplea o produce de un determinado input o output, y el nivel de eficiencia alcanzado.

En nuestro análisis, solamente un output muestra una relación interesante: la calidad docente, con una correlación de 0,66, gráficamente:

### **Análisis de Resultados.**

No debemos perder de vista que el análisis mide la eficiencia con relación a los departamentos y variables seleccionadas, cuya selección puede que no sea la óptima. Por esta razón conviene comparar los resultados obtenidos de la especificación planteada mediante otros análisis alternativos que empleen diferentes unidades de producción, diferentes inputs y/o outputs e incluso diferentes modelos. Este planteamiento recibe en la literatura el nombre de Análisis de Sensibilidad.

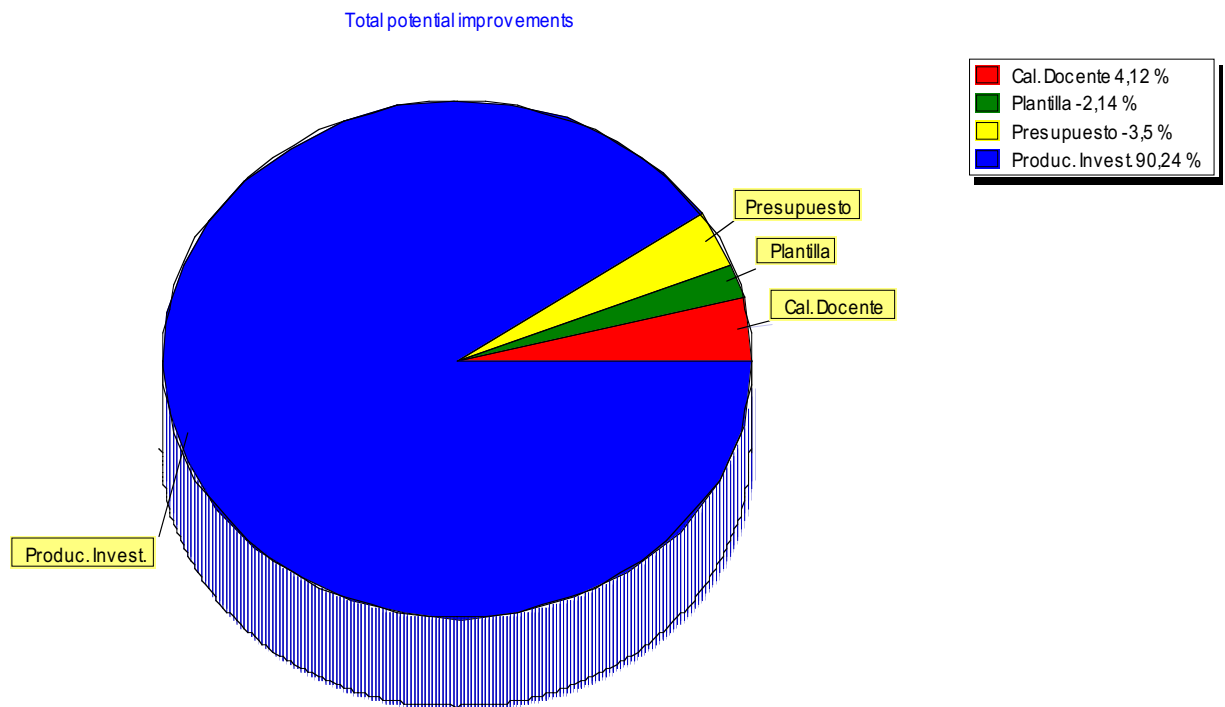
#### **4.3.1.- Modelo Revisado I.**

En este sentido, un primer paso útil consiste en un estudio de correlación entre las variables. La más significativa se localiza entre el número de créditos y el presupuesto:

Coeficientes de Eficiencia. Modelo BCC-Output (Nº Créditos Fuera)					
Eficientes		No Eficientes			
Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia
Dpto. 04	100	Dpto. 11	98,82	Dpto. 08	89,49
Dpto. 06	100	Dpto. 45	98,41	Dpto. 15	88,55
Dpto. 17	100	Dpto. 27	98,32	Dpto. 34	88,21
Dpto. 20	100	Dpto. 64	98,01	Dpto. 10	87,95
Dpto. 38	100	Dpto. 09	97,96	Dpto. 01	87,9
Dpto. 43	100	Dpto. 05	97,43	Dpto. 67	87,81
Dpto. 47	100	Dpto. 61	97	Dpto. 48	87,02
Dpto. 56	100	Dpto. 26	96,95	Dpto. 29	86,77
		Dpto. 51	96,27	Dpto. 24	86,52
		Dpto. 28	96,21	Dpto. 36	86,25
		Dpto. 30	96,02	Dpto. 39	85,57
		Dpto. 46	95,81	Dpto. 32	85,5
		Dpto. 55	95,4	Dpto. 25	85,24
		Dpto. 54	94,67	Dpto. 58	85,06
		Dpto. 02	94,5	Dpto. 19	84,73
		Dpto. 62	94,36	Dpto. 66	84,48
		Dpto. 18	94,33	Dpto. 65	83,77
		Dpto. 59	92,98	Dpto. 53	83,21
		Dpto. 44	92,82	Dpto. 14	82,1
		Dpto. 40	92,57	Dpto. 13	81,73
		Dpto. 16	92,37	Dpto. 57	81,07
		Dpto. 52	91,97	Dpto. 31	80,92
		Dpto. 07	91,62	Dpto. 50	80,15
		Dpto. 33	91,35	Dpto. 23	80,14
		Dpto. 49	90,96	Dpto. 60	79,77
		Dpto. 35	90,93	Dpto. 03	79,5
		Dpto. 22	90,08	Dpto. 21	79,13
		Dpto. 12	89,73	Dpto. 42	74,55
		Dpto. 37	89,71	Dpto. 41	72,91
		Dpto. 63	89,54		

La consecuencia es la reducción del número de unidades eficientes: de las 21 iniciales pasamos ahora a tener 8 unidades eficientes. La distribución del resto de unidades se observa en el siguiente gráfico:

La situación a nivel global tampoco resulta más favorable. En general, la consecuencia es la misma pero mucho más marcada: actuar sobre la producción científica.



El departamento 43 deja paso al 56 como líder global:

En cuanto a la relación entre la cantidad que un departamento emplea o produce de un determinado input o output y el nivel de eficiencia alcanzado, la calidad docente sigue siendo la más importante:

### **Modelo Revisado II.**

Sobre el modelo inicial planteamos ahora una versión alternativa: Modelo CCR de orientación output. La única modificación consiste, por tanto, en suponer beneficios constantes a escala.

Coeficientes de Eficiencia. Modelo CCR-Output					
Eficientes		No Eficientes			
Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia	Departamento	Coef. Eficiencia
Dpto. 04	100	Dpto. 18	99,75	Dpto. 66	86,1
Dpto. 05	100	Dpto. 34	98,96	Dpto. 63	85,5
Dpto. 06	100	Dpto. 59	97,89	Dpto. 24	83,23
Dpto. 11	100	Dpto. 07	97,11	Dpto. 42	83,05
Dpto. 12	100	Dpto. 40	95,14	Dpto. 57	82,39
Dpto. 17	100	Dpto. 41	94,07	Dpto. 31	82,22
Dpto. 19	100	Dpto. 44	94,03	Dpto. 22	81,9
Dpto. 20	100	Dpto. 67	92,16	Dpto. 49	81
Dpto. 23	100	Dpto. 55	92,1	Dpto. 54	80,59
Dpto. 26	100	Dpto. 03	91,58	Dpto. 01	79,69
Dpto. 29	100	Dpto. 61	91,51	Dpto. 21	79,13
Dpto. 30	100	Dpto. 65	90,92	Dpto. 08	78,78
Dpto. 37	100	Dpto. 10	90,43	Dpto. 52	78,63
Dpto. 38	100	Dpto. 62	90,06	Dpto. 32	78,17
Dpto. 43	100	Dpto. 02	89,82	Dpto. 13	76,5
Dpto. 45	100	Dpto. 33	89,48	Dpto. 28	76,4
Dpto. 46	100	Dpto. 60	89,37	Dpto. 16	75,93
Dpto. 47	100	Dpto. 27	89,36	Dpto. 25	75,77
Dpto. 51	100	Dpto. 58	88,81	Dpto. 35	74,63
Dpto. 53	100	Dpto. 64	87,94	Dpto. 50	71,19
Dpto. 56	100	Dpto. 36	87,6	Dpto. 09	71,06
		Dpto. 14	87,58	Dpto. 48	69,12
		Dpto. 39	86,37	Dpto. 15	47,94

